



TITLE:

# 少入出力端からの時系列を用いた ネットワーク系の構造同定 (マクロ 経済動学と非線形数理)

AUTHOR(S):

鈴木, 雅康

---

CITATION:

鈴木, 雅康. 少入出力端からの時系列を用いたネットワーク系の構造同定 (マクロ経済動学と非線形数理). 数理解析研究所講究録 2014, 1899: 56-64

ISSUE DATE:

2014-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/195905>

RIGHT:

# 少入出力端からの時系列を用いたネットワーク系の構造同定

宇都宮大学大学院工学研究科 鈴木 雅康

Masayasu Suzuki

Graduate School of Engineering, Utsunomiya University

E-mail address: ma-suzuki@ieee.org

## 1 はじめに

大規模なネットワーク (NW) 系の解析・制御への関心がますます高まる中、完全ないし部分的に未知である NW 構造を同定する手法の開発が求められている。近年, NW 構造同定に関する数々の興味深い研究 [1, 2, 3, 4, 5, 6] が報告されているが, それらの多くの手法がすべてのサブシステム (ノード) の状態を操作できるかまたは観測できるといった仮定を設けている。この仮定の達成は NW 系の規模が大きくなるにつれて難しくなるため, サブシステム数に比べて少ないアクチュエータ/センサによって, NW 構造の同定手法を開発することは非常に重要である。

NW 構造の同定問題は, グレーボックスモデルを用いた同定問題の範疇に属し, しばしば可同定性の問題に直面する [7, 8]。実際, Gonçalves と Warnick は, 観測できるノードのみに焦点をあてた NW 内部構造でさえも NW 構造に関する事前情報なしでは, 同定対象の NW 系の入出力データのみから意的に再構成することは不可能であることを示した [4, 5] (節 2 を参照されたい)。このように, NW 構造同定には, あらかじめ何らかの NW 構造に関する情報を持ち合わせておくか, あるいは, 対象の NW 系の入出力データ以外の別の種類の時系列データを収集しておく必要がある。前者の一例として, 文献 [4] の他に, 文献 [3] では可同定性の問題のために, 適用できる NW 構造は tree-type のもの限定されている。一方, 後者に関連して, 筆者らは遺伝子 NW の実験分野で確立されている node knock-out 法 [9] にヒントを得た NW 構造同定法を提案した [10, 11, 6]。それは, ある特定のサブシステムの機能を抑制 (knock-out) してオリジナルの NW 系と knock-out された NW 系の振る舞いの違いを観察することによって構造 (エッジ強度) の推定を行う。

本稿では, Gonçalves と Warnick による NW 系の動的構造関数 (dynamical structure function) の再構成法 [4] と筆者らによる knock-out 法に基づいた構造同定手法 [10] を対比しながら紹介する。

## 2 観測可能なノード間の伝達特性同定

### 2.1 対象とするネットワーク系とその動的構造関数

$N$  個の一次元システム

$$\Sigma_k : \begin{cases} \dot{x}_k = \alpha_k x_k + v_k, \\ y_k = x_k, \end{cases} \quad k \in \mathcal{I} := \{1, \dots, N\}$$

を考える。ここで,  $v_k$ ,  $y_k$  は入力と出力である。これらのシステムがネットワークを形成するとする。具体的には, サブシステム  $k (\neq l)$  に対するサブシステム  $l$  の出力の影響度 (エッジ強度) を  $\mathcal{L}_{kl}$ , NW 外部からの入力  $u$  の影響度を  $b_k \in \mathbb{R}^{1 \times m}$  で表すとして, 以下によって定義される入力  $v_k$  がサブシステム  $k$  に加えられる状況を考える。

$$v_k = \sum_{l \neq k} \mathcal{L}_{kl} y_l + b_k u.$$

いま、一般性を失うことなく、サブシステム  $k = 1, \dots, p$  の出力が NW 外部から観測できると仮定する。ここで、 $B_1 := [b_1 \dots b_p]^\top$ ,  $B_2 := [b_{p+1} \dots b_N]^\top$  とし、さらに、 $\mathcal{L}_{kk} := \alpha_k$  として重み付き隣接行列  $A = [\mathcal{L}_{kl}]$  を用いれば、NW 系は以下のように表現できる。

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{x}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y = [I \ 0] \begin{bmatrix} y \\ x_h \end{bmatrix} \end{cases}$$

ただし、 $y = [x_1 \dots x_p]^\top$ ,  $x_h = [x_{p+1} \dots x_N]^\top$  である。

微分方程式を初期値 0 のもと Laplace 変換し、変数  $X_h := \mathcal{L}\{x_h\}$  を消去すると

$$sY(s) = [A_{11} + A_{12}(sI - A_{22})^{-1}A_{21}]Y(s) + [B_1 + A_{12}(sI - A_{22})^{-1}B_2]U(s)$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned} W(s) &= A_{11} + A_{12}(sI - A_{22})^{-1}A_{21}, \\ V(s) &= B_1 + A_{12}(sI - A_{22})^{-1}B_2 \end{aligned}$$

とおく。さらに、 $W(s)$  の対角成分からなる行列  $D(s) := \text{diag}_{k \in \mathcal{I}}\{W_{kk}(s)\}$  を用いて

$$\begin{aligned} Y(s) &= Q(s)Y(s) + P(s)U(s), \\ Q(s) &= (sI - D(s))^{-1}(W(s) - D(s)), \\ P(s) &= (sI - D(s))^{-1}V(s) \end{aligned}$$

のように変形する ( $Q$  の対角成分は 0 であることに注意されたい)。関数  $Q$ ,  $P$  をそれぞれ NW 系の内部構造関数 (internal structure function), 制御構造関数 (control structure function) とよび、あわせて動的構造関数 (dynamical structure function) という。以下でこれらの関数の意味を明かにするが、そのために、観測可能 (measurable) なサブシステム  $\{\Sigma_k\}_{k=1}^p$  からなるサブシステムと観測不可能 (hidden) なサブシステム  $\{\Sigma_k\}_{k=p+1}^N$  からなるサブシステムを、それぞれを  $\Sigma^m$  と  $\Sigma^h$  で表すことにする。このとき、NW 系は図 1 (a) のような閉ループ系と見なせる。ただし、図中で  $\mathcal{L}_{k*} := [\mathcal{L}_{k,p+1} \dots \mathcal{L}_{kN}]$ ,  $\mathcal{L}_{*l} := [\mathcal{L}_{p+1,l} \dots \mathcal{L}_{Nl}]^\top$  を用いた。

### 2.1.1 内部構造関数 $Q_{kl}$ ( $1 \leq k, l \leq p$ ) の意味

関数  $Q_{kl}$  を書き下すと

$$\begin{aligned} Q_{kl}(s) &= [(sI - D(s))^{-1}]_{kk} W_{kl} \\ &= \frac{\frac{1}{s - \mathcal{L}_{kk}}}{1 - \frac{1}{s - \mathcal{L}_{kk}} \cdot \mathcal{L}_{k*}(sI - A_{22})^{-1}\mathcal{L}_{*k}} \cdot [\mathcal{L}_{kl} + \mathcal{L}_{k*}(sI - A_{22})^{-1}\mathcal{L}_{*l}] \end{aligned}$$

となる。これは、 $\Sigma_k$  と  $\Sigma^h$  のみから成る閉ループ系に  $\Sigma_l$  の状態  $x_l$  という「入力」が加えられたときの状態  $x_k$  への影響度、すなわち、 $X_l$  から  $X_k$  への開ループ伝達関数を表している (図 1 (b) 参照)。

注意 1. 関数  $W(s)$  は、 $\Sigma^m$  の内部状態 (すなわち、 $y$ ) の間の静的なフィードバックゲイン  $A_{11}$  と、内部状態が入力として  $\Sigma^h$  に入り再び  $\Sigma^m$  に戻ってくるまでの開ループ伝達関数から成り立っている。特に、第 2 項の  $k$ - $l$  要素 ( $k, l \leq p$ ) は

$$[A_{12}(sI - A_{22})^{-1}A_{21}]_{kl} = \mathcal{L}_{k*}(sI - A_{22})^{-1}\mathcal{L}_{*l}$$

とかくことができ、サブシステム  $l$  から  $\Sigma^h$  を通ってサブシステム  $k$  までへの開ループ伝達関数である。また、 $(sI - D(s))^{-1}$  は対角行列であり、その第  $k$  対角要素は  $1/(s - W_{kk}(s))$ 、したがって

$$\frac{\frac{1}{s - \mathcal{L}_{kk}}}{1 - \frac{1}{s - \mathcal{L}_{kk}} \cdot \mathcal{L}_{k*}(sI - A_{22})^{-1}\mathcal{L}_{*k}}$$

となる。これは、サブシステム  $k$  と  $\Sigma^h$  からなるフィードバック系の入出力伝達関数を意味する。

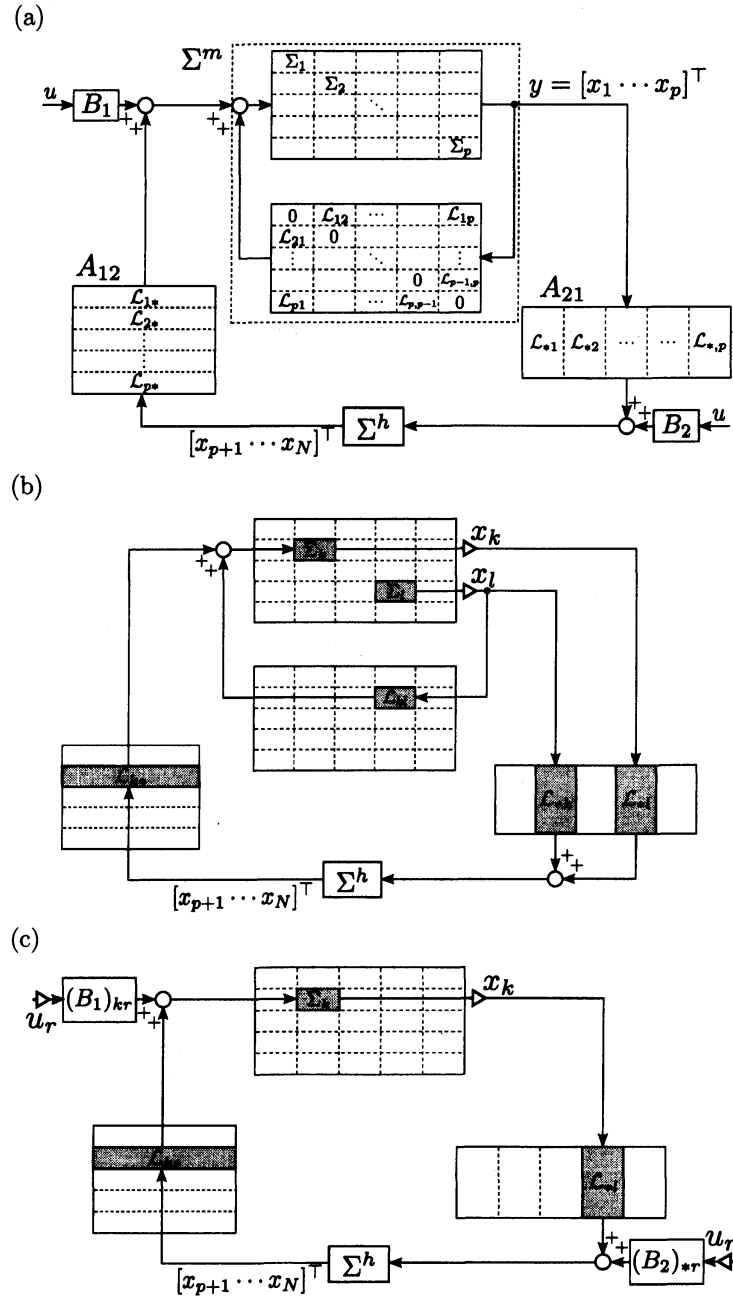


図 1: 動的構造関数の解釈: (a) NW 系全体. (b)  $Q_{kl}$  の意味する伝達関数;  $X_k/X_l$ . (c)  $P_{kr}$  の意味する伝達関数;  $X_k/U_r$ .

### 2.1.2 制御構造関数 $P_{kr}$ ( $1 \leq k \leq p, 1 \leq r \leq m$ ) の意味

関数  $P_{kr}$  を書き下すと,

$$\begin{aligned}
 P_{kr}(s) &= [(sI - D(s))^{-1}]_{kk} V_{kr} \\
 &= \frac{\frac{1}{s - \mathcal{L}_{kk}}}{1 - \frac{1}{s - \mathcal{L}_{kk}} \cdot \mathcal{L}_{k*}(sI - A_{22})^{-1}\mathcal{L}_{*k}} \cdot [(B_1)_{kr} + \mathcal{L}_{k*}(sI - A_{22})^{-1}(B_2)_{*r}]
 \end{aligned}$$

となる. 先と同様に,  $\Sigma_k$  と  $\Sigma^h$  のみから成る閉ループ系に NW 外部から入力  $u_r$  が加えられたときの状態  $x_k$  への影響度, すなわち,  $U_r$  から  $X_k$  への伝達関数を表している (図 1 (c) 参照).

## 2.2 動的構造関数の再構成

NW 系の入力  $u$  から出力  $y$  への伝達関数  $G$  と、動的構造関数  $(Q, P)$  の間には

$$G(s) = (I - Q(s))^{-1}P(s) \quad (1)$$

が成り立つ。伝達関数  $G$  は適当な入出力時系列データを用いることによって一意的に同定できることはよく知られている。Gonçalves らは、与えられた  $G$  から  $(Q, P)$  を決定（再構成）する問題に注目し、NW 構造や入出力端に関する事前の情報なしでは一般に再構成は不可能であることを示した [4]。この事実は、式 (1) が

$$G^\top = [G^\top \ I] [Q \ P]^\top$$

と書き換えられ、このとき線形作用素

$$\mathcal{A}_G : \mathbb{C}^{p+m} \rightarrow \mathbb{C}^m : x \mapsto [G^\top \ I] x$$

の零化空間が  $p$  次元である<sup>1</sup>ことに裏付けられる。特に、以下は重要である。

**補題 1.** 与えられた  $G$  に対し、式 (1) を満たす動的構造関数  $(Q, P)$  の集合  $\mathcal{S}_G$  は、 $p \times p$  の内部構造関数  $\tilde{Q}$  によって媒介変数表示でき、以下で与えられる。

$$\mathcal{S}_G = \left\{ (Q, P) : \begin{bmatrix} Q^\top \\ P^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ G^\top \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ -G^\top \end{bmatrix} \tilde{Q}^\top, \tilde{Q} \in \mathcal{Q} \right\}$$

ここで、 $\mathcal{Q}$  は内部構造関数からなる集合である。

内部構造関数の対角成分は 0 であるので、 $\tilde{Q}$  の選び方は  $p^2 - p$  次の自由度があり、したがって、式 (1) を満たす  $(Q, P)$  は  $p^2 - p$  次の自由度分無数に存在するのである。ここでの議論をまとめると以下を得る。

**定理 1** (Gonçalves and Warnick [4]). 任意の  $p \times m$  伝達関数  $G$  が与えられ、系に対して  $p > 1$  であること以外に何も情報はないものとする。このとき、動的構造関数  $(Q, P)$  を一意的に再構成することは不可能である。さらに、任意の内部構造関数  $Q$  に対して、式 (1) を満たす制御構造関数  $P$  が一つ存在する。

**定理 2.** [Gonçalves and Warnick [4]] 与えられた  $p \times m$  の伝達関数  $G$  に対し、動的構造関数  $(Q, P)$  が（構造の部分的な情報から）再構成できるための必要十分条件は、 $[Q \ P]^\top$  の各列において  $\mathcal{A}_G$  の零化空間の  $(Q, P)$  の成分を一意的に決定する  $p - 1$  個の要素が既知となることである。

### 2.2.1 再構成のための十分条件

特別な場合として、 $m = p$  を考え、さらに各入力観測可能なサブシステムに加えられているとする（一般性を失うことなく、入力は  $P$  が対角行列となるように番号付けられているとする）。すると、制御構造関数  $P$  は対角行列、すなわち  $p^2 - p$  個の非対角要素は 0 となり、定理 2 の条件を満たすようになる。したがって、動的構造関数を一意的に再構成することが可能である。

**系 1** (Gonçalves and Warnick [4]).  $m = p$ ,  $G$  はフルランク、各制御入力は独立に観測可能サブシステムに加えられているものとする。このとき、動的構造関数は一意的に再構成でき、 $H(s) := G(s)^{-1}$  と定義することで

$$Q_{kl} = -\frac{H_{kl}}{H_{kk}},$$

$$P_{kk} = \frac{1}{H_{kk}}$$

となる。

---

<sup>1</sup>rank  $\mathcal{A}_G = m$  なので。

### 3 Knock-out 構造同定

#### 3.1 対象となるネットワーク系と Knock-out

本節では、 $N$  個の同一な “多次元” SISO サブシステム

$$\Sigma_k : \begin{cases} \dot{x}_k = Ax_k + bv_k, & k \in \mathcal{I} = \{1, \dots, N\} \\ z_k = cx_k, \end{cases}$$

からなる NW 系を考える。ただし、 $x_k(t) \in \mathbb{R}^q$ ,  $v_k(t) \in \mathbb{R}$ ,  $z_k(t) \in \mathbb{R}$  である。前節と同様に、各サブシステムへの入力  $v_k = \sum_{l \neq k} \mathcal{L}_{kl} z_l + B_k u$  で与えられるものとし、本節では、重み付きグラフラプラシアンとして与えられる NW 構造  $\mathcal{L}$  を対象とする。すなわち、 $\mathcal{L}$  は  $\mathcal{L}_{kl} = \mathcal{L}_{lk} \geq 0$  ( $k \neq l$ ) と  $\mathcal{L}_{kk} = -\sum_{l \in \mathcal{I} \setminus \{k\}} \mathcal{L}_{kl}$  を満たす。また、 $u(t) \in \mathbb{R}^m$  は NW 系への外部からの入力であり、 $B := [B_1^\top \dots B_N^\top]^\top \in \mathbb{R}^{N \times m}$  は各サブシステムへの外部入力の影響度を表している。このように、外部入力はサブシステムの入力ポートを介して加えられるものとする。一方、NW 系からの出力  $y(t) \in \mathbb{R}^r$  は、 $C = [C_1 \dots C_N]$  で指定されるサブシステムの出力ポートを介して  $y = \sum_{k \in \mathcal{I}} C_k z_k$  のように与えられるものとする。このとき、NW 系  $\Sigma$  は、Kronecker 積を用いて以下のように記述される。

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = (I_N \otimes A + \mathcal{L} \otimes bc)x + (B \otimes b)u, \\ y = (C \otimes c)x. \end{cases}$$

ただし、 $x(t) = [x_1^\top(t) \ x_2^\top(t) \ \dots \ x_N^\top(t)]^\top \in \mathbb{R}^{Nq}$  である。

Knock-out 構造同定とは、NW 系  $\Sigma$  の入出力データの他に、一部のサブシステムを “knock-out” した NW 系を用意し、その入出力データも用いて NW 構造の同定を行う手法である。直接観測できないサブシステムが knock-out 可能であれば、その観測できないサブシステムの間のエッジ強度も推定できることに特徴がある。ここで、サブシステム  $k$  を knock-out するとは、状態  $x_k$  をある定常値（本節ではサブシステムの原点）に保つことである。knock-out されるサブシステムの添字集合を  $\Delta \in 2^{\mathcal{I}}$ 、その要素数を  $|\Delta|$  と記述することにする。このとき、knock-out された NW 系  $\Sigma^\Delta$  は以下に従う。

$$\begin{cases} \dot{x}^\Delta = (I_{N-|\Delta|} \otimes A + \mathcal{L}^\Delta \otimes bc)x^\Delta + (B^\Delta \otimes b)u, \\ y = (C^\Delta \otimes c)x^\Delta. \end{cases}$$

ここで、状態変数  $x^\Delta$  は、元の変数  $x$  から knock-out されたサブシステムの変数を除いたもの

$$x^\Delta(t) = [x_1^\top(t) \ \dots \ x_{i-1}^\top(t) \ x_{i+1}^\top(t) \ \dots \ x_{j-1}^\top(t) \ x_{j+1}^\top(t) \ \dots \ x_N^\top(t)]^\top, \ i, j, \dots \in \Delta,$$

であり、 $B^\Delta$ ,  $C^\Delta$ ,  $\mathcal{L}^\Delta$  は行列  $B$ ,  $C$ ,  $\mathcal{L}$  から  $\Delta$  に対応する列、行、列と行をそれぞれ除いたものである。特に、 $\emptyset \in 2^{\mathcal{I}}$ ,  $\Sigma^\emptyset = \Sigma$  であるので、記述を簡単にするために元の NW 系 (??) も knock-out された NW 系の一つとみなすことにする。

ここで、以下の仮定を考える。

仮定 1. NW 系 (??) について、以下を仮定する。

A1. サブシステムの数  $N$  とサブシステムの係数行列  $(A, b, c)$  は既知である

A2.  $\mathcal{L}$  は重み付きグラフラプラシアンである

A3. 上記 A2 に関する情報を除いて、 $\mathcal{L}$ ,  $B$ ,  $C$  は未知である

A4. NW 系（同定に用いる knocked-out NW 系を含む）は安定、可制御・可観測である。

本節では、仮定 1 のもと、与えられた  $i, j$  ( $\geq i$ ) に対して、サブシステム  $i$  とサブシステム  $j$  の間のエッジ重み  $\mathcal{L}_{ij}$  をいくつかの knock-out された NW 系  $\{\Sigma^\Delta\}_{\Delta \in 2^{\mathcal{I}}}$  に対する入出力関係より推定する問題を考える。

### 3.2 Knock-out 構造同定

Nabi-Abdolyousefi と Mesbahi は 1 次元のサブシステムからなる合意形成型の無向 NW 系に対し、その NW 構造を同定する手法を提案した [6]. 文献 [6] では、仮定 1 に加えて、 $(A, b, c) = (0, 1, 1)$ ,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\top$ ,  $\mathcal{L} \cdot 1_{N \times 1} = 0$  という設定の NW 系  $\Sigma$  を扱っている. そこでは、NW 系 (??) のダイナミクスが  $(\mathcal{L}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$  で与えられることになるが、伝達関数行列  $(sI_N - \mathcal{L})^{-1}$  を knock-out された NW 系を用いて同定し、NW 構造  $\mathcal{L}$  を推定している. 一方、筆者らは、文献 [6] の手法を多次元サブシステムからなる NW 系に対しても適用できるよう拡張し、加えて、指定された 2 つのサブシステム間のエッジ強度をその他の結合の情報なしに同定する手法を開発した [10]. 本節では、この手法を紹介する.

#### 3.2.1 一般化周波数変数を用いた NW 系の表現

サブシステム  $(A, b, c)$  に対して、 $h(s)$ ,  $d(s)$ ,  $n(s)$  をそれぞれ伝達関数、その分母多項式、分子多項式とする:  $h(s) = c(sI_q - A)^{-1}b$ ,  $d(s) = \det[sI_q - A]$ ,  $n(s) = c \operatorname{adj}[sI_q - A]b$ . NW 系  $\Sigma$  の伝達関数  $G$  は一般化周波数変数  $\phi(s) := 1/h(s)$  を用いて以下のように表現できる [12, 13].

定理 3. (??) 式の NW 系  $\Sigma$  に対し、以下が成り立つ.

$$G(s) = \mathcal{C}(\phi(s)I_N - \mathcal{L})^{-1}\mathcal{B}.$$

この定理は、 $G(s)$  が系  $(\mathcal{L}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$  の伝達関数  $H(s) := \mathcal{C}(sI_N - \mathcal{L})^{-1}\mathcal{B}$  の変数  $s$  を一般化周波数変数  $\phi(s)$  に置き換えたものに等しいことを述べている. すなわち、 $G(s) = H(\phi(s))$  である. 系  $\Sigma$  の NW 構造を同定するために、行列  $(\phi(s)I_N - \mathcal{L})^{-1}$  に注目する.

#### 3.2.2 行列 $(\phi(s)I_N - \mathcal{L})^{-1}$ の意味

行列  $(\phi(s)I_N - \mathcal{L})^{-1}$  の  $(k, l)$ -要素は

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= [0 \cdots 0 \overset{l}{1} 0 \cdots 0]^\top \\ \mathcal{C} &= [0 \cdots 0 \overset{k}{1} 0 \cdots 0] \end{aligned}$$

としたときの NW 系の入出力伝達関数に相当する. 式 (??) の関係より

$$[(\phi(s)I_N - \mathcal{L})^{-1}]_{kl} = [0 \cdots 0 \overset{k}{c} 0 \cdots 0](sI_{N_q} - I_N \otimes A - \mathcal{L} \otimes bc)^{-1}[0 \cdots 0 \overset{l}{b} 0 \cdots 0]^\top$$

であるので、この  $(k, l)$ -要素はサブシステム  $l$  に加わる入力<sup>2</sup>からサブシステム  $k$  の出力  $z_k$  への伝達関数を意味する (図 2 参照). 前節の内部構造関数は“NW 系から独立した” $\Sigma_l$  の出力から  $\Sigma_k$  の出力への伝達関数であるのに対し、ここでは、 $\Sigma_l$  は NW 系に含まれている.

#### 3.2.3 行列 $(\phi(s)I_N - \mathcal{L})^{-1}$ 具体的な計算方法

行列  $(\phi(s)I_N - \mathcal{L})^{-1}$  の  $(i, i)$ -要素は

$$\begin{aligned} [(\phi(s)I_N - \mathcal{L})^{-1}]_{ii} &= \frac{\operatorname{adj}_{ii}[\phi(s)I_N - \mathcal{L}]}{\det[\phi(s)I_N - \mathcal{L}]} \\ &= \frac{\det[\phi(s)I_{N-1} - \mathcal{L}^{\{i\}}]}{\det[\phi(s)I_N - \mathcal{L}]} \end{aligned}$$

で与えられる. ここで、関係式

$$\det[sI_{N_q} - (I_N \otimes A + \mathcal{L} \otimes bc)] = n(s)^N \det[\phi(s)I_N - \mathcal{L}] \quad (2)$$

を用いることで、以下を得る.

---

<sup>2</sup>実際に入力端があることを意味しない.

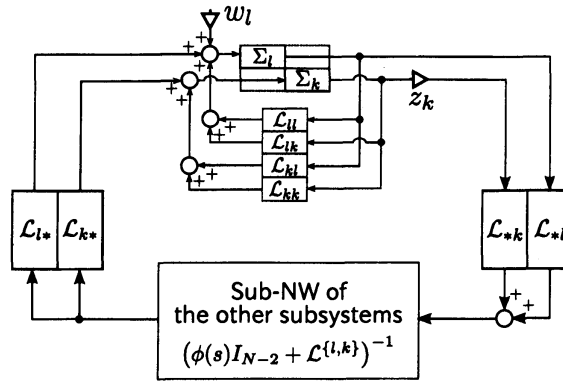


図 2:  $[(\phi(s)I + \mathcal{L})^{-1}]_{kl}$  の解釈: 入力  $w_l$  から出力  $z_k$  までの伝達関数.

定理 4. NW 系  $\Sigma$  に対して, 以下が成り立つ.

$$[(\phi(s)I_N - \mathcal{L})^{-1}]_{ii} = \frac{n(s) \det[sI_{(N-1)q} - (I_{N-1} \otimes A + \mathcal{L}^{(i)} \otimes bc)]}{\det[sI_{Nq} - (I_N \otimes A + \mathcal{L} \otimes bc)]}. \quad (3)$$

つぎに,  $(\phi(s)I_N - \mathcal{L})^{-1}$  の非対角成分について考える. 以下の関係式は, 逆行列の小行列式に関する関する公式と, 式 (2), (3) より得られる.

定理 5. NW 系  $\Sigma$  に対して, 以下が成り立つ.

$$[(\phi(s)I_N - \mathcal{L})^{-1}]_{ij}^2 = \frac{n(s)^2 \Psi_{ij}(s)}{(\det[sI_{Nq} - (I_N \otimes A + \mathcal{L} \otimes bc)])^2}.$$

ただし,

$$\begin{aligned} \Psi_{ij}(s) = & \det[sI_{(N-1)q} - (I_{N-1} \otimes A + \mathcal{L}^{(i)} \otimes bc)] \det[sI_{(N-1)q} - (I_{N-1} \otimes A + \mathcal{L}^{(j)} \otimes bc)] \\ & - \det[sI_{Nq} - (I_N \otimes A + \mathcal{L} \otimes bc)] \det[sI_{(N-2)q} - (I_{N-2} \otimes A + \mathcal{L}^{(i,j)} \otimes bc)] \end{aligned}$$

である.

このように, 非対角要素を求めるのに, オリジナルの NW 系  $\Sigma$ , サブシステム  $i$  とサブシステム  $j$  が 1 つずつ knock-out された系  $\Sigma^{(i)}$ ,  $\Sigma^{(j)}$ , サブシステム  $i$  とサブシステム  $j$  が同時に knock-out された系  $\Sigma^{(i,j)}$  の 4 つの NW 系の特性多項式を用いる.

### 3.2.4 特定のエッジ重みの推定

いま, 行列  $(\phi(s)I_N - \mathcal{L})^{-1}$  の同定結果としてある有理関数行列  $F(s)$  が求まり, 以下を満たしているとする.

$$(\phi(s)I_N - \mathcal{L})^{-1} = F(s), \text{ for each } s. \quad (4)$$

このとき, 変数  $s$  に適当な値  $\bar{s}$  を代入することで行列  $\mathcal{L}$  を  $\mathcal{L} = F(\bar{s})^{-1} + \phi(\bar{s})I_N$  のように得ることができるが, この計算では逆行列を計算しなければならない. すると, 一般に  $F(s)$  すべての要素が必要となり,  $(\phi(s)I_N - \mathcal{L})^{-1}$  内のすべての要素を同定しなければならない. しかしながら, 実際には, 特定のエッジ強度のみを推定したいなど, NW 構造全体の同定は必要ではない状況がしばしばあり, できる限り少ない手続きで対象を同定することには意義がある.

サブシステムの伝達関数が以下の形で与えられているとする.

$$h(s) = \frac{\sum_{k=0}^f \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^e \alpha_k s^k}.$$

ここで  $\alpha_0 = 1$  である. 伝達関数  $h(s)$  の相対次数を  $r (= e - f)$  とする. このとき, 以下が成り立つ.



定理 6. 有理関数行列  $F(s)$  が (4) を満たすとする、以下が成り立つ.

$$\mathcal{L} = \frac{-\xi_r I_N + \lim_{s \rightarrow \infty} [s H_r(s)]}{\beta_f^2}. \quad (5)$$

ただし

$$H_n(s) = \begin{cases} s^{r-1} F(s), & n = 0, \\ s H_{n-1}(s) - \xi_{n-1} I_N, & n = 1, \dots, r, \end{cases}$$

$$\xi_n = \begin{cases} \beta_f, & n = 0, \\ \beta_{f-n} - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{e-n+k} \xi_k, & n = 1, \dots, r, \end{cases}$$

で,  $r > f$  のとき  $\beta_l$  ( $l < 0$ ) は 0 である.

特に, 非対角要素に関しては, 以下が示される.

系 2. 有理関数行列  $F(s)$  が (4) を満たすとし,  $i < j$  とする. このとき,  $F_{ij}(s)$  の相対次数は  $2r$  以上である. さらに, 以下が成り立つ.

$$\mathcal{L}_{ij} = \begin{cases} \mu_{ij}/\beta_f^2, & \text{when } \theta_{ij} = 2r, \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

ここで,  $\mu_{ij}$  は  $F_{ij}(s)$  の分子多項式の最高次数項の係数,  $\theta_{ij}$  は  $F_{ij}(s)$  の相対次数である.

定理 5 より, knock-out NW 系に対する入出力同定によって得られるのは  $[(\phi(s)I_N + \mathcal{L})^{-1}]_{ij}$  の二乗の有理式に相当する  $F_{ij}(s)^2$  である. ここで

$$\mathcal{L}_{ij}^2 = \frac{\lim_{s \rightarrow \infty} s^{4r} F_{ij}(s)^2}{\beta_f^4}$$

であり,  $\nu_{ij}$  を有理式  $F_{ij}(s)^2$  の分子多項式の  $2(Nq - 2r)$  次項の係数とすると,  $\mathcal{L}_{ij}^2 = \nu_{ij}/\beta_f^4$  となることからわかる. 仮定 1 より  $\mathcal{L}_{ij} \geq 0$  ( $i \neq j$ ) であったので,

$$\mathcal{L}_{ij} = \frac{\sqrt{\nu_{ij}}}{\beta_f^2} \quad (6)$$

を得る.

以上をまとめて, 以下のアルゴリズムを得る.

アルゴリズム サブシステムの情報  $(A, b, c)$  より, 伝達関数を  $h(s) = n(s)/d(s)$  を計算する.

$\langle\langle i = j \text{ の場合} \rangle\rangle$

d1 NW 系  $\Sigma$  と knocked-out NW 系  $\Sigma^{\{i\}}$  に対し, それらの特性多項式を入出力関係より同定する. そして, それらを  $p(s)$  と  $p_i(s)$  と記述する.

d2  $n(s)p_i(s)/p(s)$  を計算し,  $[(\phi(s)I_N - \mathcal{L})^{-1}]_{ii}$  の同定値  $F_{ii}(s)$  とする.

d3 上記  $F_{ii}(s)$  に対し (5) を計算して,  $\mathcal{L}_{ii}$  の同定値とする.

$\langle\langle i \neq j \text{ の場合} \rangle\rangle$

o1 NW 系  $\Sigma$  と knocked-out NW 系  $\Sigma_{\{i\}}$ ,  $\Sigma_{\{j\}}$ ,  $\Sigma_{\{i,j\}}$  に対し, それらの特性多項式を入出力関係より同定する. そして, それらを  $p(s)$ ,  $p_i(s)$ ,  $p_j(s)$ ,  $p_{ij}(s)$  と記述する.

o2  $n(s)^2[p_i(s)p_j(s) - p(s)p_{ij}(s)]$  を計算する. そして,  $2(Nq - 2r)$  次項の係数を  $\nu_{ij}$  とおく.

o3 式 (6) を計算して  $\mathcal{L}_{ij}$  の同定値とする.

## 4 おわりに

本稿では，入出力端数がサブシステムの数より少ない線形ネットワーク系の構造同定問題を扱い，動的構造関数に着目した研究 [4] と knock-out 法に基づいた手法 [10] を紹介した。

謝辞 本研究は，総合科学技術会議により制度設計された最先端研究開発支援プログラム（FIRST 合原最先端数理モデルプロジェクト）により，日本学術振興会を通して助成されたものです。

## 参考文献

- [1] M. Timme. Revealing network connectivity from response dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 98, p. 224101, 2007.
- [2] D. Napolitano and T. D. Sauer. Reconstructing the topology of sparsely connected dynamical networks. *Phys. Rev. E*, Vol. 77, p. 026103, 2008.
- [3] D. Materassi and G. Innocenti. Topological identification in networks of dynamical systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. 55, No. 8, pp. 1860–1871, 2010.
- [4] J. Gonçalves and S. Warnick. Necessary and sufficient conditions for dynamical structure reconstruction of LTI networks. *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. 53, No. 7, pp. 1670–1674, 2008.
- [5] Y. Yuan, G.-B. Stan, S. Warnick, and J. Goncalves. Robust dynamical network structure reconstruction. *Automatica*, Vol. 47, pp. 1230–1235, 2011.
- [6] M. Nabi-Abdolyousefi and M. Mesbahi. Network identification via node knock-out. In *Proc. IEEE Conf. Decis. Control*, pp. 2239–2244, 2010.
- [7] L. Ljung. *System Identification: Theory for the user*. Prentice-Hall, 1987.
- [8] C. Lyzell, M. Enqvist, and L. Ljung. Handling certain structure information in subspace identification. In *Proc. IFAC Symposium on System Identification*, 2009.
- [9] R. Kühn and W. Wurst, editors. *Gene Knockout Protocols*. Humana Press, 2009.
- [10] 鈴木雅康, 高槻信希, 井村順一, 合原一幸. 線形ネットワーク系のノックアウト構造同定. 計測自動制御学会論文集 (掲載予定, 2014) .
- [11] M. Suzuki, N. Takatsuki, J. Imura, and K. Aihara. Knock-out/down-based structure identification in networks of heterogeneous subsystems. In *Proc. IEEE Conf. Decis. Control*, pp. 1343–1348, 2013.
- [12] C. T. Mullis and R. A. Roberts. Roundoff noise in digital filters: Frequency transformations and invariants. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. 24, No. 6, pp. 538–550, 1976.
- [13] S. Hara, T. Hayakawa, and H. Sugata. Stability analysis of linear systems with generalized frequency variables and its applications to formation control. In *Proc. IEEE Conf. Decis. Control*, pp. 1459–1466, 2007.